UNIDAD No 6.

Solución de Ecuaciones Diferenciales por Medio de Series de Potencia

Sucesión.

$a_n = n+1$

$n=0$

$a_0 = 0+1 = 1$

$n=2$

$a_2 = 2+1 = 3$

Serie

$\prod$ multiplicación

$\sum$ sumatoria

$$\sum_{n=0}^{4} x^n = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$$

16:22:01

1

PROPIEDADES

1) Dos series se pueden agrupar si el indice tiene el mismo valor

Ejemplo
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

indice

$\hookrightarrow n$: Subindice

a = coeficiente (número)

2) Las constantes pueden salir de la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} 4\, a_n (n+1) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1)$$

3) El coeficiente o primer término NO puede ser cero, si este fuera el caso la serie se recorre un indice
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (n-1) = \underbrace{a_1 (1-1)}_{\text{cero}} = \overbrace{a_1(1-1)}^{\text{cero}} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1)$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1)$$

16:22:01

2

4) Fase: Cuando dos series tienen la misma potencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

sust $n=1$ en x^n sust $n=1$ en x^{n-1}

x^1 x^0

Para poner 2 o más series en fase, se tendran que mover los indices hacia adelante de tal forma que tengan la misma potencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

sust $n=2$

$x^{n-1} = x^{2-1} = x^1$

ya estan en fase

16:22:01

3

Derivadas de Series.

Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ obtener la 3ª derivada.

Solución

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n) x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n)(n-1) x^{n-2}$$

$$y''' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n^2-n)(n-2) x^{n-3}$$

16:22:01

4

Calcular la solución general de $y''-y=0$ empleando series de potencia.

① Se propone una solución

② La solución se deriva tantas veces como lo indique la ED

③ Las derivadas se sustituyen en la ED

① $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ } → NO CAMBIA

② $y'=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n)x^{n-1}$ } comprobar las Propiedades

$\rightsquigarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(n)x^{n-1}$

② $y''=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(n)(n-1)x^{n-2}$

$\rightsquigarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)x^{n-2}$

16:22:01

5

③ $y''-y=0$

Sust. serie (I) serie (II)

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

objetivo: obtener una sola serie donde los coeficientes seran la ecuacion de recurrencia, esta ecuacion nos permite encontrar una serie para la sol. general.

④ Comprobar que esten en fase para poder agruparlos

De (I) $n=2$ x^0

De (II) $n=0$ x^0

Propiedad No 1

16:22:01

6

5. Una vez comprobada que estan en fase, se utilizara una variable ficticia que permitira agrupar las series.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n (n)(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

16:22:01

las variables ficticias seran las potencias de "x"

De I

$k = n-2$. * → sust. el indice $k = 2-2$

despejar n

$n = k+2$ * $\boxed{k=0}$

De II

$k = n \rightarrow \boxed{k=0}$

$n = k$

6. Convertir las series de "n" a "k"

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (k+2)(k+2-1) x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

7

7. Agrupar factorizando x^k

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{[(k+2)(k+1) a_{k+2} - a_k]}_{2 \text{ Factores}} \underbrace{x^k} = 0$$

16:22:01

Sacando los coeficientes igualados a cero

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} - a_k = 0$$

8. Se obtiene la ecuación de recurrencia, despejando el coeficiente mas grande.

$$\boxed{a_{k+2} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)}}$$

8

(9) Para $k = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots \infty$ obtener los coeficientes

$$a_{k+2} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)}$$

$k = 0$

$$a_2 = \frac{a_0}{2}$$

$k = 1$

$$a_3 = \frac{a_1}{6}$$

$k = 2$

$$a_4 = \underbrace{\frac{a_2}{12} = \frac{\frac{a_0}{2}}{12} = \frac{a_0}{24}}$$

$k = 3$

$$a_5 = \frac{a_3}{20} = \frac{\frac{a_1}{6}}{20} = \frac{a_1}{120}$$

Sabiendo que la solución es $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

desarrollando

$$y = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

$$y = \frac{a_0}{2} x^2 + \frac{a_1}{6} x^3 + \frac{a_0}{24} x^4 + \frac{a_1}{120} x^5 + \cdots \quad \cdots$$

16:22:01

9

Factorizando a_0 y a_1

$$y = \underbrace{a_0 \left[1 + \frac{x^{\cancel{4}2}}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots\cdots \right] + a_1 \left[x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots\cdots \right]}$$

identificar a que serie se parece.

EJERCICIO. Hallar la Ecuación de recorrencia

$$\boxed{y'' - y' = 0}$$

16:22:01

10